Colle maths 15

Question 1 :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Alors les espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe : $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.

Preuve :

Posons H_p : Les espaces propres associés à p valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

- Pour $n=2$: Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de u. Soit $x \in E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u)$ tel que x soit vecteur propre de u (c'est-à-dire $x \neq 0$). Alors $u(x) = \lambda_1 x$, et $u(x) = \lambda_2 x$: donc $(\lambda_1 - \lambda_2) x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ car $x \neq 0$. Contradiction, donc $x = 0$.
- Supposons H_p vraie au rang p. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ des valeurs propres de u distinctes deux à deux.
  Soit $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in E_{\lambda_1}(u) \times \dots \times E_{\lambda_{p+1}}(u)$ tel que $\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$. On compose par u : $\sum_{i=1}^{p+1} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = 0$.
  Alors $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_{p+1} - \lambda_i) x_i = 0$. Or $(\lambda_{p+1} - \lambda_i) x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, et par hypothèse de récurrence $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe. Donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_{p+1} - \lambda_i) x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = 0$, car $\lambda_{p+1} \neq \lambda_i$.
  En reprenant dans la première équation, $x_{p+1} = 0$. H_{p+1} est vraie.

Par récurrence, le théorème est vérifié.

Question 2 :

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Soit v l'endomorphisme induit par u sur F. Alors $\chi_v | \chi_u$.

Preuve :

Considérons G un supplémentaire de F dans E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, e_n)$ une base adaptée à cette décomposition, avec $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_r)$ une base de F.

Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right)$, où $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(v)$, et donc $\chi_u(x) = \left|\begin{array}{c|c} A - x I_r & A' \\ \hline 0 & A'' - x I_{n-r} \end{array}\right|$,

Soit $\chi_u(x) = \operatorname{Det}(A - x I_r) \operatorname{Det}(A'' - x I_{n-r}) = \chi_A(x) \times \chi_{A''}(x) = \chi_v(x) \times \chi_{A''}(x)$. Donc $\chi_v | \chi_u$.

Question 3 : Caractérisation de la diagonalisabilité à l'aide de χ :

$$u \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u) \end{cases}.$$

Preuve :

$\Rightarrow$: On sait que $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$. On note $r_j = \dim(E_{\lambda_j}(u))$. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition,

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix}$, et $\chi_u(x) = \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - x)^{r_j}$, ainsi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, et $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et on a donc bien $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $m_{\lambda_j}(u) = r_j$.

$\Leftarrow$: Comme χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, et $\deg(\chi_u) = n$, $\operatorname{Sp}(u) \neq \emptyset$, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes d'ordres respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, on a $\chi_u(x) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (x - \lambda_j)^{\alpha_j}$. Par passage aux degrés : $\deg(\chi_u) = n = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$, donc $n = \sum_{j=1}^{p} \dim(E_{\lambda_j}(u)) = \dim(E)$. Ainsi u est diagonalisable.

Question 4 :

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, diagonalisable. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes.

Le polynôme $\pi(x)=\prod_{i=1}^{p}(x-\lambda_i)$ est annulateur de u.

Preuve :

$E=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition. Notons $r_i=\dim(E_{\lambda_i}(u))$.

Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_p\end{pmatrix}$, d'où $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^k)=[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)]^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_1^k & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_p^k\end{pmatrix}$

Soit alors $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(Q)=d$, et $Q(X)=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On a donc $Q(u)=\sum_{k=0}^{d} a_k u^k$,

D'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q(u))=\sum_{k=0}^{d} a_k \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^k)=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{d} a_k\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{d} a_k\lambda_p^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q(\lambda_1) & & & \\ & Q(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q(\lambda_p)\end{pmatrix}$.

En particulier pour $Q=\pi$: Comme $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\pi(\lambda_i)=0$, On a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\pi(u))=0 \Rightarrow \pi(u)=0$.

Question 5 :

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit F un sous-esapce vectoriel de E stable par u. Alors u_F induit par u sur F est aussi diagonalisable.

Preuve :

Par théorème, $\exists\pi\in\mathbb{K}[X]$ annulateur de u scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$. $\pi(u)=0$,
donc $\forall x\in E$, $(\pi(u))(x)=0$. En particulier $\forall x\in F$, $(\pi(u))(x)=0$. Par construction, $\forall x\in F$, $u_F(x)=u(x)\in F$.
Donc $u_F(u_F(x))=u_F(u(x))=u(u(x))$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in F$, $u_F^k(x)=u^k(x)$. Par combinaison linéaire,
$\forall P\in\mathbb{K}[X]$, $\forall x\in F$, $(P(u_F))(x)=(P(u))(x)$. Ainsi $\pi(u_F)=\pi(u)=0$, donc π est annulateur de u_F.
π est scindé à racines simples, donc par théorème u_F est diagonalisable.

* * * * *