Colle maths 09

Théorème de continuité sous le signe intégrale :

On suppose que :

1. $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
2. $\forall t \in I,\ x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A
3. $\exists \varphi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Alors $F(x)$ existe et est continue sur A.

Preuve :

$\forall x \in A,\ f(x,t)$ est intégrable sur I et continue par morceaux sur I, donc F existe bien.

Soit $a \in A$. Pour montrer que F est continue en a, on utilise une caractérisation séquentielle. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. On veut montrer que $(F(x_n))$ converge vers $F(a)$. $F(x_n) = \int_I f(x_n,t)\,dt,\ F(a) = \int_I f(a,t)\,dt$.

On note $g_n\ :\ t \mapsto f(x_n,t)$, et $g\ :\ t \mapsto f(a,t)$. g_n et g sont continues par morceaux et intégrables sur I.

$\forall t \in I,\ g_n(t) = f(x_n,t) \underset{n\to\infty}{\to} f(a,t)$, car $\forall t \in I,\ x \mapsto f(x,t)$ est continue en a. Donc (g_n) converge simplement vers g sur I. $\forall t \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |g_n(t)| = |f(x_n,t)| \leqslant \varphi(t)$, φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I.

Donc par théorème de convergence dominée appliqué à la suite (g_n), $\int_I g_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\to} \int_I g(t)\,dt$, c'est-à-dire $F(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} F(a)$. Ainsi par caractérisation séquentielle, F est continue en a.

Cela étant vrai $\forall a \in A$, F est continue sur A.

Définition et continuité de la fonction Gamma d'Euler :

Sous réserve d'existence, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

- Domaine de définition : Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$. On étudie l'intégrabilité de f_x sur $I =]0,+\infty[$.
  - f_x est continue sur I et positive.
  - $f_x \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$, et $\frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1] \Leftrightarrow x > 0$, donc par théorème de comparaison, f_x est intégrable sur $]0,1] \Leftrightarrow x > 0$.
  - $f_x(t) \underset{t\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par théorème de comparaison, f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$.
  - Finalement, f_x est intégrable sur $]0+\infty[\ \Leftrightarrow\ x > 0$.

  Ainsi Γ est définie sur $A =]0,+\infty[$.
- Continuité de Γ : Soit $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$.
  - $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur I, et $\forall t \in I,\ x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
  - Soient $[a,b] \subset A$, et $x \in [a,b]$.
    - Si $t \in]0,1]$, $\ln(t) \leqslant 0 \Rightarrow x \mapsto e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$ est décroissante et positive $\Rightarrow \forall x \in [a,b],\ 0 \leqslant e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \leqslant e^{(a-1)\ln(t)}e^{-t} = t^{a-1}e^{-t}$
    - Si $t \in [1,+\infty[$, $\ln(t) \geqslant 0 \Rightarrow x \mapsto e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$ est croissante et positive $\Rightarrow \forall x \in [a,b],\ 0 \leqslant e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \leqslant e^{(b-1)\ln(t)}e^{-t} = t^{b-1}e^{-t}$.

    Soit $\varphi\ :\ t \mapsto \begin{cases} t^{a-1}e^{-t}, & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{b-1}e^{-t}, & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{cases}$, continue par morceaux, positive et intégrable sur I

    Par construction, $\forall (x,t) \in [a,b] \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

  Ainsi par théorème de continuité avec hypothèse de domination locale, Γ est continue sur A.

Caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction Gamma d'Euler :

$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, définie sur $A=\mathbb{R}_+^*$

– Caractère $\mathscr{C}^1$ sur A : On pose $f(x,t)=t^{x-1}e^{-t}=e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$. $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+^{*2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\ln(t)t^{x-1}e^{-t}$.

- Fixons $x>0$. $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $I=\mathbb{R}_+^*$, et en 0, $\ln(t)t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to0}{\sim}\ln(t)t^{x-1}<0$.

  Soit $\gamma\in]1-x,1[$, $t^{\gamma}\ln(t)t^{x-1}=t^{\gamma+x-1}\ln(t)\underset{t\to0}{\to}0$, et comme $\gamma<1$, par règle de Riemann en 0,

  $t\mapsto\ln(t)t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. Par théorème de comparaison, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$.

  En ∞, $\ln(t)t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, $\dfrac{1}{t^2}\geqslant0$, et $2>1$, donc $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

- $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A.

- Soit $[a,b]\subset A$, et $x\in[a,b]$. $\forall t\in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=|\ln(t)|t^{x-1}e^{-x}\leqslant\begin{cases}t^{a-1}|\ln(t)|e^{-t}, & \text{si } t\in]0,1]\\ t^{b-1}|\ln(t)|e^{-t}, & \text{si } t>1\end{cases}=\psi(t)$.

  ψ est positive, continue par morceaux et intégrable sur I.

- $\forall x\in A$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur I.

D'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ pour tout segment $[a,b]\subset A$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et $\forall x\in A$, $\Gamma'(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}\ln(t)e^{-dt}$.