Colle de maths 05

Question 1 :

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

Preuve :

$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. On effectue une IPP.

$$F(x) = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = -\frac{\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

$\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$, et $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par théorème de domination, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Ainsi par théorème, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge.

$x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}$ admet donc une limite finie en $+\infty$, donc F admet une limite finie en $+\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

Question 2 :

$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$

Preuve :

$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge. Or, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[0,\pi]$,

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge $\Leftrightarrow \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge. Or, comme $\frac{|\sin(t)|}{t} \geqslant 0$, on a par théorème :

$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge $\Leftrightarrow$ la suite $\left(\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt\right)$ diverge $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt\right)\right)_{n\geqslant 2}$ diverge

$\Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge.

Soit $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$. On pose $x = t - n\pi$, $dx = dt$. On a alors :

$$u_n = \int_0^\pi \frac{|\sin(x+n\pi)|}{x+n\pi} dx = \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{x+n\pi} dx = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n\pi} dx \geqslant \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{(n+1)\pi} dx \Rightarrow u_n \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{(n+1)\pi} \geqslant 0$$

Or $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge donc par théorème de comparaison, $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Question 3 :

Soit $x \in E$, on a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$.

Ainsi les normes usuelles de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

Preuve :

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$

Ainsi $\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n 1|x_i| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{n}\|x\|_2$

Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i|^2 \leqslant \|x\|_\infty^2 \Rightarrow \|x\|_2 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$

On a ainsi $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$, ce qui prouve que $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$ sont équivalentes.

$\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty \leqslant \sqrt{n}\|x\|_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \Rightarrow \|\ \|_2$ et $\|\ \|_1$ sont équivalentes.

Question 4 :

Si N et $\| \ \|$ sont deux normes équivalentes de E, (x_n) converge vers $l \in E$ pour $N \Leftrightarrow (x_n)$ converge vers l pour $\| \ \|$.

Preuve :

$\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leqslant \|x\| \leqslant \beta N(x)$

$\Rightarrow$: Par hypothèse, (x_n) converge vers l pour $\| \ \|$, c'est-à-dire $\|x_n - l\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant N(x_n - l) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|x_n - l\|$, et $\dfrac{1}{\alpha}\|x_n - l\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, donc $N(x_n - l) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ par théorème d'encadrement.

$\Leftarrow$: Par hypothèse, (x_n) converge vers l pour N, c'est-à-dire $N(x_n - l) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \|x_n - l\| \leqslant \beta N(x_n - l)$, et $\beta N(x_n - l) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, donc $\|x_n - l\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ par théorème d'encadrement.

Question 5 :

Soit E un espace vectoriel normé de dimension p finie, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on note $(x_{n,i})$ les suites composantes de (x_n) dans la base $\mathscr{B}$ $(i \in [\![1, p]\!])$

Soit $l \in E$ tel que $l = \sum_{i=1}^{p} l_i \vec{e}_i$, alors (x_n) converge vers l dans $E \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]$, $(x_{n,i})$ converge vers l_i dans $\mathbb{K}$.

Preuve :

On munit E de la norme 1 associée à la base $\mathscr{B}$: si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i \vec{e}_i$, alors $\|x\| = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$

On sait que (x_n) converge vers l dans $E \Leftrightarrow (x_n)$ converge vers l pour $\| \ \|$.

$\Rightarrow$: Par hypothèse, $\|x_n - l\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{p} |x_{n,i} - l_i| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$0 \leqslant |x_{n,i} - l_i| \leqslant \|x_n - l\|$, or $\|x_n - l\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, et par théorème d'encadrement $|x_{n,i} - l_i| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow (x_{n,i})$ converge vers l_i

$\Leftarrow$: Soit $i \in [\![1, p]\!]$, par hypothèse $x_{n,i} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} l_i$, donc $x_{n,i}\vec{e}_i \rightarrow l_i \vec{e}_i$ $(\|x_{n,i}\vec{e}_i - l_i\vec{e}_i\| = |x_{n,i} - l_i| \underbrace{\|\vec{e}_i\|}_{\in\mathbb{R}},\ |x_{n,i} - l_i| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0)$.

Par combinaison linéaire de suites convergentes, $\left(\sum_{i=1}^{p} x_{n,i}\vec{e}_i\right)$ converge vers $\sum_{i=1}^{p} l_i \vec{e}_i$, donc (x_n) converge vers l.