Colle 03 – Version 1

Question 1 : Théorème spécial des séries alternées :

On suppose que $\sum u_n$ est une série alternée, que $(|u_n|)$ est décroissante, et que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Alors $\sum u_n$ converge.

Preuve :

On ne considère que le cas où $u_0 \geqslant 0$. On introduit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

– $S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$, donc (S_{2n}) est décroissante.

– $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geqslant 0$, donc (S_{2n+1}) est croissante.

– $S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ car $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc par théorème elles convergent vers une même limite S.

Par théorème, on en déduit que S_n converge vers S, donc $\sum u_n$ converge.

Question 2 : Convergence des intégrales de fonctions type Riemann :

– Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $a > 0$. $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

– Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$.

Preuve :

– Notons $f_\alpha : \begin{array}{rcl} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t^\alpha} \end{array}$. f_α est continue sur $[a, +\infty[$. Notons alors $F_\alpha(x) = \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$

$$\forall x > a,\ F_\alpha(x) = \begin{cases} \ln(x) - \ln(a) & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^x = \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{a^{\alpha}-1} - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right] & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Donc $F_\alpha(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

– Notons $f_\alpha : \begin{array}{rcl} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{(b-t)^\alpha} \end{array}$. f_α est continue sur $[a, b[$. Notons alors $F_\alpha(x) = \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

$$\forall x \in [a, b[,\ F_\alpha(x) = \begin{cases} -\ln(b-x) + \ln(b-a) & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{-(b-t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - (b-x)^{1-\alpha}\right] & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Donc $F_\alpha(x)$ admet une limite finie en b $\Leftrightarrow$ $1 - \alpha > 0$.

Question 3 : Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives :

Soient f et $g \in \mathscr{C}_m^0(I, \mathbb{R})$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, et $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.

Preuve :

Notons $G : \begin{array}{rcl} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$. $\int_a^b g$ converge donc G est majorée : $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b[$, $\int_a^x g(t)\,dt \leqslant M$

Or $f \leqslant g$ donc $\forall x \in [a, b[$, $\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^x g(t)\,dt \leqslant M$, ainsi F est majorée et donc $\int_a^b f$ converge.

Question 4 : La convergence absolue d'une intégrale implique sa convergence :

– 1er cas : $f \in \mathscr{C}_m^0(I, \mathbb{R})$: On introduit $f^+ = \max(f, 0) = \frac{f + |f|}{2}$ et $f^- = \max(-f, 0) = \frac{-f + |f|}{2}$

f^+ et f^- sont continues par morceaux et positives, et $f^+ + f^- = |f|$, et $f^+ - f^- = f$.

Ainsi $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, or f est intégrable sur I donc par théorème de domination,

f^+ et f^- sont intégrables sur I. Alors $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ convergent (f^+ et f^- positives).

Ainsi $\int_I f^+ - f^-$ converge, donc $\int_I f$ converge.

– 2ème cas : $f \in \mathscr{C}_m^0(I, \mathbb{C})$: On introduit $g = \Re\mathrm{e}(f)$ et $h = \Im\mathrm{m}(f)$ continues par morceaux sur I.

On a $|g| \leqslant |f|$ et $|h| \leqslant |f|$, or f est intégrable sur I donc par théorème de domination,

g et h sont intégrables sur I. D'après le premier cas, $\int_I g$ et $\int_I h$ convergent.

Ainsi, $\int_I g + ih$ converge, donc $\int_I f$ converge.