Colle 01 – Version 1

Question 1 : Théorèmes de comparaison :

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.
 – Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
 – Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0, v_n \geq 0$ et $u_n = O(v_n)$.
 – Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
 – Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

On suppose $\forall n \geq 0, u_n \geq 0, v_n \geq 0$, et $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Alors $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum v_n$ converge, c'est-à-dire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Preuves :

– $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq T_n$.

La série $\sum v_n$ converge donc (T_n) converge, ainsi (T_n) est majorée : $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq M$

Or $S_n \leq T_n$ et S_n est croissante, donc $S_n \leq M$: S_n est majorée, donc $\sum u_n$ converge.

– Si $S_n \rightarrow +\infty$, comme $T_n \geq S_n$, on a $T_n \rightarrow \infty$ et donc $\sum v_n$ diverge.

$\exists M \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq M v_n$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum M v_n$ converge et par le premier théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge. De même, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

$u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n| \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, -\frac{1}{2} v_n \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{2} v_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$

Ainsi $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$, on peut donc appliquer le deuxième théorème de comparaison.

Question 2 : comparaison série-intégrale :

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive, décroissante et continue sur $[0, +\infty[$. On cherche à étudier la nature de $\sum_{n \geq 0} f(n)$.

On pose $u_n = f(n)$. Idée fondamentale : comparer $u_n = f(n)$ avec $v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n, n+1], f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ car f est décroissante. On intègre alors entre n et $n+1$:

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt \Rightarrow u_{n+1} = f(n+1) \leq v_n \leq f(n) = u_n$$

On a également ainsi : $v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt \leq u_n = f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt = v_{n-1}$.

Les séries $\sum f(n)$ et $\sum \left(\int_n^{n+1} f \right)$ sont de même nature. $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)$ converge.

Preuves :

On a l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq v_n \leq u_n$.

– Avec $0 \leq v_n \leq u_n$, si $\sum u_n$ converge, par théorème de comparaison des séries à termes positifs $\sum v_n$ converge.

– Avec $0 \leq u_{n+1} \leq v_n$, si $\sum v_n$ diverge, par théorème de comparaison $\sum u_{n+1}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

D'après le théorème précédent et en reprenant les notations précédemment utilisées :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum v_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \int_n^{n+1} f \text{ converge} \Leftrightarrow \text{la suite} \left(\sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} f \right) \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \text{la suite} \left(\int_0^{n+1} f \right) \text{ converge} \Leftrightarrow \text{la suite} \left(\int_0^n f \right) \text{ converge.}$$

Question 3 : séries de Riemann :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Preuve :

- 1^{er} cas : $\alpha \leq 0$: Alors $\frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0$, donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

- 2^{ème} cas : $\alpha > 0$: Soit $f : \begin{matrix} [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \end{matrix}$ positive, décroissante et continue sur $[1, +\infty[$.

Par théorème de comparaison série-intégrale, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $\left(\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}\right)$ converge.

$$\text{Or, } \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}, \text{ et : } \begin{cases} \ln(n) \text{ diverge,} & \text{et pour } \alpha \neq 1 : \\ \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1. \end{cases}$$

Question 4 : série harmonique :

$$\text{La suite } \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \text{ converge.}$$

Preuve :

$$\text{On note } u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n), \text{ et } \alpha_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{On cherche un équivalent de } \alpha_n \text{ en } \infty : \alpha_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc $\alpha_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \leq 0$, et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$ converge, et donc la suite (u_n) converge.

Question 5 : convergence absolue :

$$\text{Si } \sum u_n \text{ converge absolument, alors } \sum u_n \text{ converge.}$$

Preuve :

$$- 1^{\text{er}} \text{ cas : } (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{ On introduit } u_n^+ = \max(u_n, 0) = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_n \leq 0 \end{cases} \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geq 0 \\ -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \end{cases}$$

Par construction, $\forall n \geq 0, u_n^+ \geq 0, u_n^- \geq 0, |u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$, ainsi $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$
Si $\sum |u_n|$ converge, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent par théorème de comparaison des séries à termes positifs
Ainsi $\sum u_n^+ - \sum u_n^- = \sum u_n$ converge.

$$- 2^{\text{ème}} \text{ cas : } (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \text{ On introduit } a_n = \Re(u_n) \text{ et } b_n = \Im(u_n), \text{ on a : } |a_n| \leq |u_n| \text{ et } |b_n| \leq |u_n|$$

Si $\sum |u_n|$ converge, $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent par théorème de comparaison

Ainsi (a_n) et (b_n) convergent absolument donc convergent (1^{er} cas), donc $\sum a_n + i b_n = \sum u_n$ converge.