Colle 20

1 Définition du mouvement cinétique par rapport à un point, démonstration du TMC

On considère un point M de masse m en mouvement dans un référentiel R, de vitesse $\vec{v}$.

On appelle moment cinétique du point M par rapport à un point O et la grandeur $\overrightarrow{L_{M/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ moment de la quantité de mouvement.

On considère maintenant R galiléen et M subit l'action d'une force $\vec{f}$.

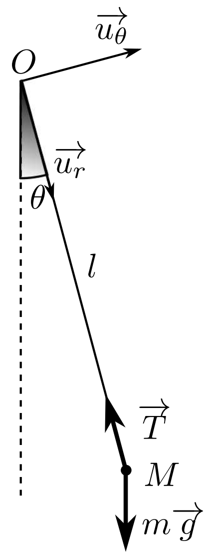
$$m\vec{a} = \vec{f} \Leftrightarrow \frac{m\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}$$

On calcule le moment cinétique de M par rapport à O :

$$\overrightarrow{L_{M/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{M/O}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{v}} \wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{\mathrm{d}m\vec{v}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{f}}$$

D'où $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{M/O}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$.

2 Mise en équation du pendule pesant par le TMC



Bilan des forces

- poids
- tension du fil

On applique le théorème de l'énergie cinétique (la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ correspond aux coordonnées cylindriques) :

$$\overrightarrow{L_{M/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{u_r} \wedge ml\dot{\theta}\vec{u_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

D'où $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = ml^2\ddot{\theta}\vec{u_z}$.

- $\overrightarrow{M_{\vec{T}/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires)

- $\overrightarrow{M_{m\vec{g}/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -lmg\sin\theta \end{vmatrix} = -lmg\sin\theta\vec{u_z}$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g}}_{\text{projection sur } \vec{u_z}} \Rightarrow l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

3 Définition d'une force centrale, mouvement plan, constante des aires et vitesse aréolaire

$\vec{F}$ est exercée sur M est une force centrale si elle est de la forme $\vec{F} = F(r)\vec{e_r}$ (en coordonnées sphériques). Il s'agit dans ce cas d'une force centrale de centre O.

On applique le théorème du moment cinétique par rapport à O.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{M/O}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = r\vec{e_r} \wedge F(r)\vec{e_r} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{L_{M/O}} \text{ est constant.}$$

Dans un mouvement à force centrale il y a conservation du moment cinétique.

Conséquences

1. La direction de $\overrightarrow{L_{M/O}}$ reste constante. Donc $\overrightarrow{OM}$ est toujours orthogonal à $\overrightarrow{L_{M/O}}$. Le point M se déplace donc toujours dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{L_{M/O}}$.
2. $\left\|\overrightarrow{L_{M/O}}\right\|$ est aussi constante ; on choisit à partir de maintenant de repérer le point M par ses coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire.

$$\overrightarrow{L_{M/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = m \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

Comme $\left\|\overrightarrow{L_{M/O}}\right\|$ est constante alors $C = r^2\dot{\theta}$ ne varie pas au cours du temps. Le mouvement suit donc la loi des aires, et la constante C des aires est calculable avec les conditions initiales.

Vitesse aréolaire Entre un instant t et $t+\mathrm{d}t$, l'aire élémentaire balayée est $\mathrm{d}S$; c'est l'aire du triangle. On a alors $v_a = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

Or $\mathrm{d}S = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|r\vec{u_r} \wedge (\mathrm{d}r\vec{u_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta})\right\| = \dfrac{1}{2}\left|r^2\mathrm{d}\theta\right|$, on a donc $v_a = \dfrac{1}{2}r^2\left|\mathrm{d}\theta\right| = \dfrac{C}{2}$.

4 Force attractive en $\frac{1}{r^2}$, équation de la trajectoire par la RFD (formules de Binet) et différentes formes de mouvement, énergie mécanique totale

On pose $\vec{f} = \dfrac{-k}{r^2}\vec{e_r}$ avec $k > 0$. C'est une force centrale de centre O.

Formules de Binet But de la manœuvre : éliminer t dans l'expression de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en polaires pour simplifier les calculs.

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} \qquad \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

La force est centrale, on peut donc éliminer le temps avec la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} \\ &= \frac{C}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \\ &= -C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

On a donc $\vec{v} = -C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right)\vec{u_r} + \dfrac{C}{r}\vec{u_\theta}$; en posant $u = \dfrac{1}{r}$ on a donc :

$$\boxed{\vec{v} = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\vec{u_r} + Cu\vec{u_\theta}}$$

On procède de la même façon pour l'accélération $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \underbrace{\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}}_{=\overrightarrow{0}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\frac{C}{r^2} \\
&= -C\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{C}{r^2}
\end{aligned}$$

Finalement $\overrightarrow{a} = \left(-C^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - C^2u^3\right)\overrightarrow{u_r} = \boxed{-C^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\overrightarrow{u_r}}$

Équation de la trajectoire On part le la RFD : $\overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a} \Rightarrow \frac{-k}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -ku^2\overrightarrow{u_r} = -mC^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\overrightarrow{u_r}$. Après projection sur $\overrightarrow{u_r}$ et simplification on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{k}{mC^2}$.

Résolution

$$u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{mC^2} \Rightarrow r = \frac{\frac{mC^2}{k}}{1 + \frac{AmC^2}{k}\cos(\theta - \theta_0)} = \boxed{\frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

Il s'agit de l'équation d'une conique.

Énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}$$

Or $r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ et $\overrightarrow{v} = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{u_r} + Cu\overrightarrow{u_\theta}$ d'où $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \frac{-e}{p\sin(\theta - \theta_0)}$.
Alors :

$$\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}m\left[\frac{C^2e^2}{p^2}\sin^2(\theta - \theta_0) + C^2\left(\frac{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}{p}\right)^2\right] - k\left(\frac{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}{p}\right) \\
&= \frac{mC^2}{2p^2}\left[e^2 + 1 + 2e\cos(\theta - \theta_0)\right] - \frac{k}{p}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right)
\end{aligned}$$

On a une relation entre p et C : $p = \frac{mC^2}{k} \Rightarrow C^2 = \frac{kp}{m}$ (d'après la résolution de l'équation différentielle). On remplace, on simplifie et on trouve enfin $E_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1)$.

5 Trajectoire circulaire en gravitation, calcul de v, E_m sur une ellipse et la troisième loi de Kepler

On considère S de masse M et P de masse m, en interaction dans le référentiel héliocentrique et on suppose que la trajectoire de P est un cercle de rayon R. On utilise le PFD :

$$\overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a} \Rightarrow \frac{-GMm}{R^2}\overrightarrow{u_r} = m\left(-R\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

- Projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow v$ constante.
- Projection sur $\overrightarrow{u_r}$: $\frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$

On peut aussi en déduire $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = \boxed{\frac{-GMm}{2R}}$.

Troisième loi de Kepler

$$T = \frac{\text{périmètre}}{\text{vitesse}} = \frac{2\varpi R}{v} \Rightarrow T^2 = \frac{4\varpi^2 R^2}{\frac{GM}{R}} = \frac{4\varpi^2}{GM} R^3$$

On peut alors retrouver les relations des ellipses quelconques sachant que E_m et T ne dépendent **que** de a (et pas de b).