Colle 30 – Version 1

Question 1 : Calculer la longueur d'une arche de cycloïde

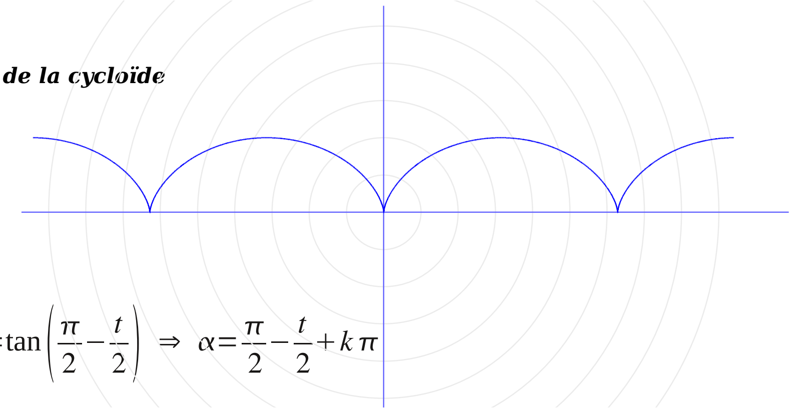
$$\begin{cases} x(t)=t-\sin(t) & \text{définie et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(t)=1-\cos(t) & \text{définie et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \text{ est paire} \\ y \text{ est impaire} \end{cases} \Rightarrow \text{ symétrie d'axe } (O\,y) \qquad x(t+2\pi)=x(t)+2\pi \quad \text{et} \quad y(t+2\pi)=y(t)$$

Étude sur $[0,\pi]$+ symétrie d'axe Oy+ translation $2k\pi\vec{i}$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt=2\int_0^{\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=2\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2 t}\,dt$$

$$=2\int_0^{\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt=4\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=8$$



Question 2 : Calculer la courbure en un point régulier de la cycloïde

$$\begin{cases} x(t)=t-\sin(t) & \text{définie et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(t)=1-\cos(t) & \text{définie et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t)=1-\cos t \\ y'(t)=\sin(t) \end{cases}$$

$$\tan(\alpha)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{cotan}\frac{t}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}+k\pi$$

$$\gamma=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{dt}\times\frac{dt}{ds}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$$

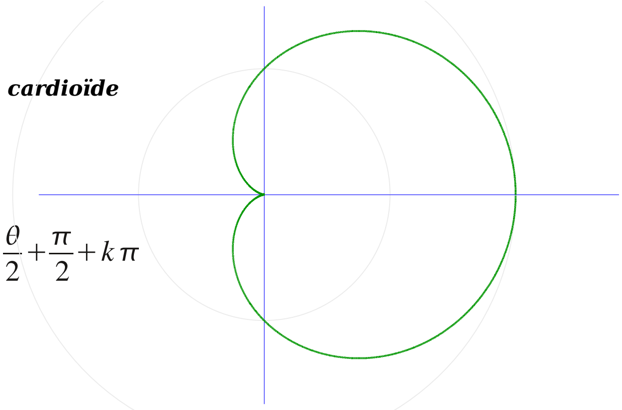
Question 3 : Calculer la longueur d'une cardioïde

$\rho(\theta)=1+\cos\theta$ définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, paire, 2π périodique $\quad\rho'(\theta)=-\sin\theta$

Étude et tracé sur $[0,\pi]$+ symétrie d'axe $(O\,x)$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}=2\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8$$



Question 4 : Calculer la courbure en un point régulier de la cardioïde

$\rho(\theta)=1+\cos\theta$ définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$\rho'(\theta)=-\sin\theta$

$$\tan V=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=-\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} \Rightarrow V=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\alpha=\theta+V=\frac{3}{2}\theta+\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{3}{2} \qquad \gamma=\frac{d\alpha}{d\theta}\times\frac{d\theta}{ds}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}$$

Question 5 : Calculer l'aire de l'intérieur d'une ellipse et d'une cardioïde

La formule de Green-Riemann nous donne : $A=\iint_U dx\,dy=\int_{\gamma}-y\,dx=\frac{1}{2}\int_{\gamma}\rho^2\,d\theta$

Aire de l'intérieur de l'ellipse $\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \end{cases}$: $A=\int_{\gamma}-y\,dx=\int_0^{2\pi}a\,b\sin^2 t\,dt=\pi a\,b$

Aire de l'intérieur de la cardioïde $\rho=1+\cos\theta$: $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{3}{2}\pi$