Colle semaine 29 – Version 1

Question 1 : Une rotation du plan a la même matrice dans toute BON :

Soit R_θ la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ dans la BOND $(\vec{i},\vec{j})$, u l'automorphisme orthogonal associé.
Alors dans toute BOND la matrice de la rotation d'angle θ est R_θ.

Preuve :

Soit $(\vec{i}',\vec{j}')$ une autre BOND, $P=\mathscr{P}_{(\vec{i},\vec{j})}^{(\vec{i}',\vec{j}')}$ orthogonale (matrice de passage entre deux BON)
$(\vec{i},\vec{j})$ et $(\vec{i}',\vec{j}')$ sont directes donc $\det(P)>0$, donc $P\in \mathrm{SO}(2)$
$\exists \alpha\in\mathbb{R}$ tel que $P=R_\alpha$
$\mathscr{M}_{(\vec{i}',\vec{j}')}(u)=P^{-1}R_\theta P=R_\alpha^{-1}R_\theta R_\alpha=R_{-\alpha}R_\theta R_\alpha=R_{-\alpha+\theta+\alpha}=R_\theta$

Question 2 : Un automorphisme orthogonal du plan de déterminant -1 est une réflexion :

S_θ est la matrice d'une réflexion, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Preuve :

$S_\theta^2=I_2 \Rightarrow S_\theta$ est la matrice de la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(S_\theta-I_2)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(S_\theta+I_2)$.
$\dim(\mathrm{Ker}(S-I_2))=0,1$ ou 2.
Si $\dim(\mathrm{Ker}(S-I_2))=2$, alors $S_\theta=I_2$ Impossible
Si $\dim(\mathrm{Ker}(S-I_2))=0$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(S_\theta+I_2))=2 \Rightarrow S_\theta=-I_2$ Impossible
Donc $\dim(\mathrm{Ker}(S-I_2))=1 \Rightarrow$ Symétrie par rapport à une droite
$\forall X\in\mathrm{Ker}(S_\theta-I_2)$, $\forall Y\in\mathrm{Ker}(S_\theta+I_2)$,
$(X|Y)={}^tX\cdot Y={}^t(S_\theta X)\cdot(-S_\theta Y)=-{}^tX\cdot{}^tS_\theta\cdot S_\theta\cdot Y=-{}^tX\cdot S_\theta^2\cdot Y=-{}^tX\cdot Y=-(X|Y)$
Donc $(X|Y)=0$. Donc $\mathrm{Ker}(S_\theta-I_2)\perp\mathrm{Ker}(S_\theta+I_2)$.
S_θ est la matrice d'une réflexion.

Question 3 :

Soient $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien, $u\in\mathrm{O}(E)$, F sev de E
Si F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u et les restrictions de u à F et à $F^\perp$ sont des automorphismes orthogonaux.

Preuve :

1. $u_{|F}\in\mathrm{O}(F)$:
   $u_{|F}$: $F\to F$ et est linéaire.
   $\forall x\in F$, $\|u_{|F}(x)\|=\|u(x)\|=\|x\|$ car $u\in\mathrm{O}(E)$
   Donc $u_{|F}\in\mathrm{O}(F)$ donc $u_{|F}$ est un automorphisme orthogonal de F.
2. $F^\perp$ est stable par u :
   $\forall x\in F^\perp$, $\forall y\in F$, $\exists! t\in F$ tel que $y=u_{|F}(t)$
   $(u(x)|y)=(u(x)|u_{|F}(t))=(u(x)|u(t))=(x|t)=0$ (car u est orthogonal)
   Donc $u(x)\perp y$ donc $u(x)\in F^\perp$ donc $F^\perp$ est stable par u.
3. $u_{|F^\perp}\in\mathrm{O}(F^\perp)$: idem 1.

Question 4 :

Soient $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien, u un automorphisme orthogonal de l'espace, $F=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$
Si $\dim(\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}))=2$, alors u a pour matrice dans toute BON obtenue en concaténant une base de F et une de $F^\perp$: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Preuve :

$\forall x\in F,\ u(x)=x\in F$ F est stable par u.
Donc $F^\perp$ est stable par u, $\dim(F^\perp)=1$, $u_{|F}\in \mathrm{O}(F)$, et $u_{|F^\perp}\in\mathrm{O}(F^\perp)$
$F^\perp=\mathrm{Vect}(a)$, (a unitaire).
$u_{|F^\perp}(a)=\lambda a$, donc $\|u_{|F^\perp}(a)\|=\|\lambda a\|=|\lambda|\|a\|$
Or, $\|u_{|F^\perp}(a)\|=\|a\|$ Donc $\lambda=\pm 1$.
Si $\lambda=1$, $u_{|F^\perp}(a)=a$ Or $u(a)=a$ Donc $a\in F$ et $a\in F^\perp$ Donc $a=\vec{0}$ Impossible.
Donc $\lambda=-1$, et $u(a)=-a$.
Notons (b,c) une BON de F, $\mathscr{B}'=(b,c,a)$ est une BON de E car F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
$u(b)=b$, $u(c)=c$, $u(a)=-a$
Donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(u)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Question 5 :

Étant donnés deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ distincts de même norme, il existe une unique réflexion σ qui échange $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Preuve :

<u>Analyse :</u> Supposons avoir trouvé une réflexion σ qui échange a et b :
On pose $\vec{n}=\vec{b}-\vec{a}\neq\vec{0}$
$\sigma(\vec{n})=\sigma(\vec{b}-\vec{a})=\sigma(\vec{b})-\sigma(\vec{a})=\vec{a}-\vec{b}=-\vec{n}$
Donc σ est la réflexion de plan $\{\vec{n}\}^\perp$
<u>Synthèse :</u> Soit σ la réflexion par rapport à $\{\vec{n}\}^\perp$ avec $\vec{n}=\vec{b}-\vec{a}$
$\sigma(\vec{n})=-\vec{n}$
$\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{n}$ En effet $(\vec{a}+\vec{b}|\vec{n})=(\vec{a}+\vec{b}|\vec{b}-\vec{a})=(\vec{a}|\vec{b})-(\vec{a}|\vec{a})+(\vec{b}|\vec{b})-(\vec{b}|\vec{a})=\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2=0$
$\vec{a}+\vec{b}\in\{\vec{n}\}^\perp$ donc $\sigma(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}$
$\begin{cases}\sigma(\vec{b})-\sigma(\vec{a})=\vec{a}-\vec{b}\\ \sigma(\vec{b})+\sigma(\vec{a})=\vec{a}+\vec{b}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sigma(\vec{b})=\vec{a}\\ \sigma(\vec{a})=\vec{b}\end{cases}$

Question 6 :

Soient $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien, u un automorphisme orthogonal de l'espace, $F=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$

Si $\dim(\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}))=1$, alors u a pour matrice dans toute BON obtenue en concaténant une base de F et une de $F^{\perp}$: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$

Preuve :

F est stable par u donc $F^{\perp}$ est stable par u et $u_{|F^{\perp}}\in \mathrm{O}(F^{\perp})$.

Or $\dim(F^{\perp})=2$

Donc $u_{|F^{\perp}}$ est soit une réflexion de $F^{\perp}$, soit une rotation de $F^{\perp}$.

Si $u_{|F^{\perp}}$ est une réflexion de $F^{\perp}$, u possède un vecteur invariant $\vec{b}$ non nul dans $F^{\perp}$: Impossible ($\vec{b}\in F\cap F^{\perp}$)

Donc $u_{|F^{\perp}}$ est une rotation de $F^{\perp}$.

Notons (b,c) une BON de $F^{\perp}$, $F=\mathrm{Vect}(a)$

Alors $\mathcal{M}_{(b,c)}(u_{|F^{\perp}})=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ et $u(a)=a$

$\mathcal{B}'=(b,c,a)$ est une BON de E car F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

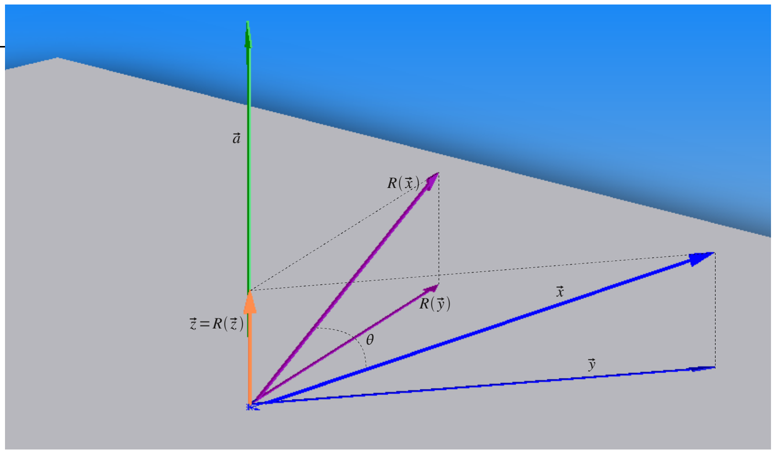
Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

Question 7 :

Soit $\vec{a}$ unitaire, $\theta\in\mathbb{R}$.

Alors $\forall \vec{x}\in E,\ R_{\vec{a},\theta}(\vec{x})=\cos(\theta)\vec{x}+(\vec{a}|\vec{x})(1-\cos(\theta))\vec{a}+\sin(\theta)(\vec{a}\wedge\vec{x})$

$\forall \vec{x}\perp\vec{a},\ R_{\vec{a},\theta}(\vec{x})=\cos(\theta)\vec{x}+\sin(\theta)(\vec{a}\wedge\vec{x})$



Preuve :

Notons $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ avec $\vec{y}\perp\vec{a}$ et $\vec{z}\in\mathrm{Vect}(\vec{a})$

$R(\vec{x})=R(\vec{y})+R(\vec{z})=R(\vec{y})+\vec{z}$

$\vec{y}=\|\vec{y}\|\vec{b}$ ($\vec{b}$ unitaire)

$R(\vec{y})=\|\vec{y}\|(\cos(\theta)\vec{b}+\sin(\theta)\vec{c})$ ($\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}$)

$=\cos(\theta)\vec{y}+\sin(\theta)\|\vec{y}\|\times\vec{a}\wedge\vec{b}$

$=\cos(\theta)\vec{y}+\sin(\theta)\times\vec{a}\wedge\vec{y}$

$\vec{z}=p_{\vec{a}}(\vec{x})=(\vec{a}|\vec{x})\vec{a}$

$\vec{y}=\vec{x}-\vec{z}=\vec{x}-(\vec{a}|\vec{x})\vec{a}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } R(\vec{x}) &= \cos(\theta)\big(\vec{x}-(\vec{a}|\vec{x})\vec{a}\big)+\sin(\theta)\big(\vec{a}\wedge(\vec{x}-(\vec{a}|\vec{x})\vec{a})\big)+(\vec{a}|\vec{x})\vec{a}\\ &= \cos(\theta)\vec{x}+(\vec{a}|\vec{x})(1-\cos(\theta))\vec{a}+\sin(\theta)(\vec{a}\wedge\vec{x})-\underbrace{\sin(\theta)(\vec{a}|\vec{x})\vec{a}\wedge\vec{a}}_{=\vec{0}}\end{aligned}$$

Si $\vec{x}\perp\vec{a}$, alors $R(\vec{x})=\cos(\theta)\vec{x}+\sin(\theta)(\vec{a}\wedge\vec{x})$