Colle semaine 27 (2) – Version 1

Question 1 :

Résolution de l'équation : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

Preuve :

$f(x,y)=g(x+y,x-y)=g(u,v)$ avec $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=u+v \\ 2y=u-v \end{cases} \Leftrightarrow \varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (u,v) \end{array}$ est bijective

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{\partial g}{\partial v}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}-\dfrac{\partial g}{\partial v}$ $\qquad g$ est de classe $C^2 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right)+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial g}{\partial v}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right)-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}-\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=0 \Leftrightarrow 4\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial v}=a(v)$$

$g(u,v)=A(v)+B(u)$ avec $A,B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donc $f(x,y)=A(x+y)+B(x-y)$

Question 2 :

1. $F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E
2. $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

Preuve :

1. $-F^{\perp} \subset E$

   $-\vec{0} \in F^{\perp} \Rightarrow F^{\perp} \neq 0$

   $-\forall \vec{x},\vec{y} \in F^{\perp} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{a} \in F, \quad (\lambda\vec{x}+\vec{y}|\vec{a})=\lambda \underbrace{(\vec{x}|\vec{a})}_{=0 \ \vec{x}\in F^{\perp}}+\underbrace{(\vec{y}|\vec{a})}_{=0 \ \vec{y}\in F^{\perp}}=0 \qquad$ donc $\lambda\vec{x}+\vec{y} \in F^{\perp}$

   Donc F est un sous espace vectoriel de E.
2. $\forall \vec{x} \in G^{\perp}, \ \forall \vec{b} \in G, \ (\vec{x}|\vec{b})=0$ or $\forall \vec{a} \in F, \ \vec{a} \in G \Rightarrow (\vec{x}|\vec{a})=0$ donc $\vec{x} \in F^{\perp}$

Question 3 :

Une famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul est libre.

Preuve :

$\forall \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R} \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i=\overrightarrow{0_E}$

$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\vec{x}_i|\vec{x}_k)=(\overrightarrow{0_E}|\vec{x}_k) \Rightarrow \lambda(x_k|x_k)=(0_E|x_k)$ car $(x_i|x_k)=0$ si $i \neq k$

$\lambda_k\|\vec{x}_k\|^2=0 \Rightarrow \lambda_k=0 \qquad$ Donc F est une famille libre.

Question 4 :

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien.

1. $\forall a\in E,\ \ x\mapsto(a|x)$ est une forme linéaire.
2. $\forall\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R}),\ \ \exists!\vec{a}\in E$ tel que $\varphi(\vec{x})\mapsto(\vec{a}|\vec{x})$

Preuve :

1. $\forall x\quad (a|x)\in\mathbb{R}\qquad \forall x,y\in E\qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}$
   $\varphi_a(\lambda x+y)=(a|\lambda x+y)=\lambda(a|x)+(a|y)=\lambda\varphi_a(x)+\varphi_a(y)$ donc φ_a est une forme linéaire.
2. $\theta\ :\ \begin{array}{l} E\to\mathscr{L}(E,\mathbb{R})\\ \vec{a}\mapsto\varphi_{\vec{a}}\end{array}$
   $\forall\vec{a},\vec{b}\in E\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\qquad \theta(\vec{a}+\lambda\vec{b})=\varphi_{\vec{a}+\lambda\vec{b}}=\vec{x}\mapsto(\vec{a}+\lambda\vec{b}|\vec{x})=\vec{x}\mapsto(\vec{a}|\vec{x})+\lambda(\vec{b}|\vec{x})=\varphi_{\vec{a}}+\lambda\varphi_{\vec{b}}=\theta(\vec{a})+\lambda\theta(\vec{b})$
   Donc θ est linéaire.
   $\dim(\mathscr{L}(E,\mathbb{R}))=\dim(E)$
   $\forall\vec{a}\in\mathrm{Ker}(\theta),\ \ \theta(\vec{a})=0\ \Leftrightarrow\ \varphi_{\vec{a}}\ :\ \vec{x}\mapsto 0\ \Leftrightarrow\ \forall\vec{x}\in E(\vec{a}|\vec{x})=0\ \Rightarrow\ (\vec{a}|\vec{a})=0\ \Rightarrow\ \vec{a}=0\qquad \mathrm{Ker}(\theta)=\{\vec{0}\}$
   Donc θ injective donc bijective donc $\forall\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})\quad \exists!a\in E$ tel que $\varphi=\varphi_{\vec{a}}$

Question 5 :

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien, F un sev de E alors $F\oplus F^{\perp}=E$

Preuve :

Soit $\mathscr{B}_1=(e_1,\dots,e_p)$ une BON de F que l'on complète en $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p,\underbrace{x_{p+1},\dots,x_n}_{\mathscr{B}_2})$ une base de E, $\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2=\mathscr{B}$

On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt à $\mathscr{B}$, on obtient $\mathscr{B}'=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ (BON de E).

On pose $G=\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$

$-\ G\perp F$ en effet $\forall x\in G,\ \ \forall y\in F,$

$\exists\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $x=\sum_{i=p+1}^{n}\lambda_i e_i\qquad \exists\mu_1,\dots,\mu_p\in\mathbb{R}$ tels que $y=\sum_{i=1}^{p}\mu_i e_i$

$(x|y)=0.\mu_1+\dots+0.\mu_p+0.\lambda_{p+1}+\dots+0.\lambda_n=0$ donc $G\subset F^{\perp}$

$-\ F\cap F^{\perp}=\{0\}\quad F+F^{\perp}\subset E\qquad \dim\underbrace{(F+F^{\perp})}_{\dim F+\dim F^{\perp}}\leqslant n\ \Rightarrow\ \dim F^{\perp}\leqslant n-p$

$\dim(G)=n-p$ donc $\dim(F^{\perp})\geqslant\dim(G)=n-p$ donc $\dim(F^{\perp})=\dim(G)=n-p$ donc $F^{\perp}=G$

Donc $F\oplus F^{\perp}=E$

Question 6 : Théorème de minimisation

Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien, F un sev de E, $\vec{x}\in E$

$\mathrm{d}(\vec{x},F)=\inf\{\|\vec{x}-\vec{y}\|,\vec{y}\in F\}=\|\vec{x}-p_F(\vec{x})\|$

$p_F(\vec{x})$ (projection orthogonale de $\vec{x}$ sur F) est l'unique vecteur qui réalise le minimum.

Preuve :

<u>Existence :</u>

Notons p_F la projection orthogonale sur F

$p_F(\vec{x})\in F\ \ ,\ \ \vec{x}-p_F(\vec{x})\perp F$

$\forall\vec{y}\in F$:

$\|\vec{x}-\vec{y}\|=\|\vec{x}-p_F(\vec{x})+p_F(\vec{x})-\vec{y}\|$

Or, $\vec{x}-p_F(\vec{x})\in F^{\perp}$ et $p_F(\vec{x})-\vec{y}\in F$

D'après le théorème de pythagore :

$\|\vec{x}-p_F(\vec{x})+p_F(\vec{x})-\vec{y}\|=\|\vec{x}-p_F(\vec{x})\|^2+\|p_F(\vec{x})-\vec{y}\|^2\geqslant\|\vec{x}-p_F(\vec{x})\|$

donc $p_F(\vec{x})$ réalise le minimum de $\{\|\vec{x}-\vec{y}\|\}$

<u>Unicité :</u>

Si $\vec{y_0}$ réalise aussi le minimum de $\{\|\vec{x}-\vec{y}\|\}$

$\|\vec{x}-\vec{y_0}\|=\|\vec{x}-p_F(\vec{x})\|\ \Rightarrow\ \|p_F(\vec{x})-y_0\|^2=0\ \Rightarrow\ \vec{y_0}=p-F(\vec{x})\ \Rightarrow$ unicité