Colle 27 (1) – Version 1

Question 1 :

$$\boxed{A\cdot {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)=\mathrm{Det}(A)\cdot I_n}$$

Preuve :

Notons $C=A\cdot {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)$

$$c_{i,k}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)_{j,k}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot(-1)^{k+j}\Delta_{k,j}$$

1^er^ cas : Si $k=i$

$$c_{i,i}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}=\mathrm{Det}(A) \quad \text{(Développement suivant la ligne } i \text{ de } \mathrm{Det}(A))$$

2^ème^ cas : Si $k\neq i$

Soit A' la matrice obtenue à partir de A en recopiant la ligne i dans la ligne k.

A' a deux lignes identiques $\Rightarrow$ $\mathrm{Det}(A')=0$

$$\mathrm{Det}(A')=\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\cdot(-1)^{k+j}\Delta_{k,j} \quad \text{Développement suivant la ligne } k$$

$$0=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot(-1)^{k+j}\Delta_{k,j}=c_{i,j}$$

Donc $C=\mathrm{Det}(A)\cdot I_n$

Question 2 : Systèmes de Cramer : caractérisation et formules

Soit S : $\begin{cases} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \vdots \ + \ \vdots \ + \ \vdots \ = \ \vdots \\ a_{n,1}x_1+\ldots+a_{n,n}x_n=b_n \end{cases}$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall \vec{b}$, S admet une unique solution
2. Pour $\vec{b}=\vec{0}$, S admet une unique solution
3. u est bijective
4. A est inversible ($\mathrm{Det}(A)\neq 0$)

Dans ce cas, $\forall i$, $x_i=\dfrac{\mathrm{Det}(A_i)}{\mathrm{Det}(A)}$ où la matrice A_i est obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne par le second membre.

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. : Évident.

2. $\Rightarrow$ 3. : 2. $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(u)=\{\vec{0}\}$ $\Rightarrow$ u injective $\Rightarrow$ u bijective (car $u\in L(\mathbb{K}^n)$)

3. $\Leftrightarrow$ 4. : Évident.

3. $\Rightarrow$ 1. : $u(\vec{x})=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}=u^{-1}(\vec{b})$ Unique solution.

Notons $\mathscr{B}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$

$C_1, C_2,\ldots, C_n$ les colonnes de A_i, avec $C_i=B=x_1C_1+x_2C_2+\ldots+x_nC_n$

$$\mathrm{Det}(A_i)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,C_2,\ldots,C_{i-1},B,C_{i+1},\ldots,C_n)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,C_2,\ldots,C_{i-1},\sum_{k=1}^{n}x_kC_k,C_{i+1},\ldots,C_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,C_2,\ldots,C_k,\ldots,C_n)=0+\ldots+0+x_i\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_n)+0+\ldots+0=x_i\mathrm{Det}(A)$$

Question 3 : Inégalité des accroissements finis pour les fonctions complexes

Soient $f\ :\ I\to\mathbb{C},\ \ a,b\in I,\ \ f$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Si $|f'|\leqslant M$ alors $|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a)$.

Preuve :

On pose $f=g+ih$ avec g et $h\ :\ I\to\mathbb{R}$

f continue sur $[a,b]\ \Rightarrow\ g$ et h continues sur $[a,b]$

f dérivable sur $]a,b[\ \Rightarrow\ g$ et h dérivables sur $]a,b[$

1^er^ cas : $f(b)-f(a)\in\mathbb{R}$

$f(b)-f(a)=g(b)-g(a)+i(h(b)-h(a))\ \Rightarrow\ h(b)-h(a)=0$

$|g'|=\sqrt{g'^2}\ \leqslant\ \sqrt{g'^2+h'^2}=|f'|\ \leqslant\ M$

I.A.F. à g : $|g(b)-g(a)|\leqslant M|b-a|$

$\Rightarrow\ |f(b)-f(a)|\leqslant M|b-a|$

2^ème^ cas : $f(b)-f(a)\in\mathbb{C}$

$\exists\lambda\in\mathbb{U}$ tel que $\lambda\left(f(b)-f(a)\right)\in\mathbb{R}$ $\qquad(\lambda=1$ si $f(b)-f(a)\in\mathbb{R})$

$\lambda=\mathrm{e}^{-i\theta}$ où θ est un argument de $f(b)-f(a)$

On applique le 1^er^ cas : $|\lambda f'|=|f'|\leqslant M$

$|f(b)-f(a)|=|\lambda(f(b)-f(a))|\leqslant M|b-a|$

Question 4 :

Si f est une fonction complexe continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b|f|$

Preuve :

On pose $f=g+ih$ avec g et $h\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ continues.

1^er^ cas : $\int_a^b f\ \in\mathbb{R}$

$\int_a^b f=\int_a^b g\quad$ et $\quad\int_a^b h=0$

$\left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b|g|\qquad$ or $|g|\leqslant|f|\ \Rightarrow\ \left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b|f|$

2^ème^ cas : $\exists\lambda\in\mathbb{U}$ tel que $\lambda\int_a^b f\ \in\mathbb{R}$

$\left|\int_a^b f\right|=\left|\lambda\int_a^b f\right|=\left|\int_a^b\lambda f\right|\overset{1^{\text{er}}\text{ cas}}{\leqslant}\int_a^b|\lambda f|\leqslant\int_a^b|f|$