Colle 26 – Version 1

Question 1 :

$$\boxed{A\cdot{}^t\mathrm{Com}(A)=\mathrm{Det}(A)\cdot I_n}$$

Preuve :

Notons $C=A\cdot{}^t\mathrm{Com}(A)$

$$c_{i,k}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot{}^t\mathrm{Com}(A)_{j,k}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot(-1)^{k+j}\Delta_{k,j}$$

1^{er} cas : Si $k=i$

$$c_{i,i}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}=\mathrm{Det}(A) \quad \text{(Développement suivant la ligne } i \text{ de } \mathrm{Det}(A))$$

$2^{\text{ème}}$ cas : Si $k\neq i$

Soit A' la matrice obtenue à partir de A en recopiant la ligne i dans la ligne k.

A' a deux lignes identiques $\Rightarrow$ $\mathrm{Det}(A')=0$

$$\mathrm{Det}(A')=\sum_{j=1}^{n} a'_{k,j}\cdot(-1)^{k+j}\Delta'_{k,j} \quad \text{Développement suivant la ligne } k$$

$$\Leftrightarrow\ 0=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot(-1)^{k+j}\Delta_{k,j}=c_{i,j}$$

Donc $C=\mathrm{Det}(A)\cdot I_n$

Question 2 : Système de Cramer : caractérisation et formules

Soit $S\ :\ \begin{cases} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \vdots\ +\ \vdots\ +\ \vdots\ =\ \vdots \\ a_{n,1}x_1+\ldots+a_{n,n}x_n=b_n \end{cases}$

Notons $A=(a_{i,j})$ et $u\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & (a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n,1}x_1+\ldots+a_{n,n}x_n) \end{array} \in\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\vec{b}$, S admet une unique solution
2. Pour $\vec{b}=\vec{0}$, S admet une unique solution
3. u est bijective
4. A est inversible ($\mathrm{Det}(A)\neq0$)

Dans ce cas, $\forall i$, $x_i=\dfrac{\mathrm{Det}(A_i)}{\mathrm{Det}(A)}$ où la matrice A_i est obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne par le second membre $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. : Évident.

2. $\Rightarrow$ 3. : 2. $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(u)=\{\vec{0}\}$ $\Rightarrow$ u injective $\Rightarrow$ u bijective (car $u\in\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$)

3. $\Leftrightarrow$ 4. : Évident.

3. $\Rightarrow$ 1. : $u(\vec{x})=\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{x}=u^{-1}(\vec{b})$ Unique solution.

Notons $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$

$C_1,C_2,\ldots,C_n$ les colonnes de A_i, avec $C_i=B=x_1C_1+x_2C_2+\ldots+x_nC_n$

$$\mathrm{Det}(A_i)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,C_2,\ldots,C_{i-1},B,C_{i+1},\ldots,C_n)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}\left(C_1,C_2,\ldots,C_{i-1},\sum_{k=1}^{n}x_kC_k,C_{i+1},\ldots,C_n\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,C_2,\ldots,C_k,\ldots,C_n)=0+\ldots+0+x_i\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_n)+0+\ldots+0=x_i\mathrm{Det}(A)$$

Question 3 :

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a=(a_1,a_2)\in U$, $l\in\mathbb{R}$

Si f tend vers l quand (x,y) tend vers (a_1,a_2) alors $\forall \vec{u}\in\mathbb{R}^2$:

$\varphi_{\vec{u}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{V}(0) & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a+t\vec{u}) \end{array}$ tend vers l quand t tend vers 0.

Preuve :

$a\in U$, U ouvert, donc $\exists R>0$ tel que $\mathscr{D}(a,R)\subset U$.

$t\in D_{\varphi_{\vec{u}}}$ si $\|t\vec{u}\|\leqslant R$, c'est-à-dire $|t|\leqslant\dfrac{R}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{u}\neq\vec{0}$, Donc $\varphi_{\vec{u}}$ est au moins définie sur $\left[-\dfrac{R}{\|\vec{u}\|},\dfrac{R}{\|\vec{u}\|}\right]\subset\mathscr{V}(0)$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tel que $\forall(x,y)\in U$, $\|(x,y)-a\|\leqslant\delta \Rightarrow |f(x,y)-l|\leqslant\varepsilon$

$(x,y)=a+t\vec{u}$, $\|(x,y)-a\|=\|t\vec{u}\|=|t|\cdot\|\vec{u}\|\leqslant\delta$

On pose $\delta'=\dfrac{\delta}{\|\vec{u}\|}>0$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $|t|\leqslant\delta' \Rightarrow \|t\vec{u}\|\leqslant\delta \Rightarrow |\varphi_{\vec{u}}(t)-l|=|f(a+t\vec{u})-l|\leqslant\varepsilon$, Donc $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_{\vec{u}}(t)=l$.

Question 4 :

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^\alpha y^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma} \text{ sinon, avec } \alpha,\beta\in\mathbb{N},\ \gamma>0 \end{array}\right. \end{array}$ est continue en $(0,0) \Leftrightarrow \alpha+\beta>2\gamma$.

Preuve :

$\Leftarrow$: $|f(x,y)|\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha+\beta}}{(x^2+y^2)^\gamma}=\sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha+\beta-2\gamma>0} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0=f(0,0)$

$\Rightarrow$: On suppose $\alpha+\beta\leqslant2\gamma$.

$f(0,y)=0$ si $\alpha\neq0$

$\forall x>0$, $f(x,x)=\dfrac{x^{\alpha+\beta}}{(2x^2)^\gamma}=\dfrac{1}{2^\gamma x^{2\gamma-(\alpha+\beta)}}$ $\begin{array}{l} \to +\infty \text{ si } 2\gamma-\alpha-\beta\neq0 \\ \to \dfrac{1}{2^\gamma} \text{ si } 2\gamma-\alpha-\beta=0 \end{array}$

Si $\alpha=\beta=0$, $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\gamma}\to+\infty$

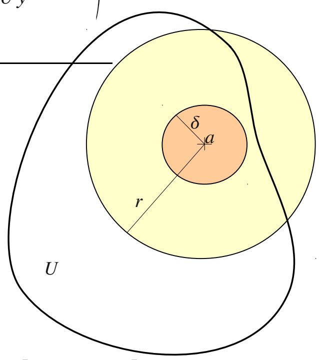
Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Question 5 : Condition nécessaire d'extremum

$f : U\to\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Si f possède un extremum en $a\in U$, alors $\overrightarrow{\text{grad}}(f(a))=\vec{0}$ $\left(\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=0 \end{array}\right.\right)$

a : point critique.



Preuve :

U ouvert, $a\in U$, donc $\exists\delta>0$ tel que $\mathscr{D}(a,\delta)\subset U$.

Soit $\alpha=\min(\delta,r)>0$

Si f possède un maximum local en a :

Posons $g : \begin{array}{ccc} [-\alpha,+\alpha] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a+t\vec{e}_1) \end{array}$

f est de classe $\mathscr{C}^1 \Rightarrow g$ dérivable

f admet un maximum local en $a \Rightarrow g$ admet un maximum local en $0\in]-\alpha,+\alpha[$

$\Rightarrow g'(0)=0$, et $g'(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=0$

De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ avec $h : \begin{array}{ccc} [-\alpha,+\alpha] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a+t\vec{e}_2) \end{array}$