

Question 1 : Équivalence antisymétrique alternée

Si f est p -linéaire, alors f antisymétrique $\Leftrightarrow f$ alternée.

Preuve :

$$\begin{aligned} \Rightarrow : & \forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) \in E^p \quad \forall i \neq j \text{ si } \vec{x}_i = \vec{x}_j \\ & f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p) = -f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p) \\ & \Rightarrow f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p) = \vec{0}_F \text{ donc } f \text{ est alternée.} \\ \Leftarrow : & \forall i \neq j, \forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) \in E^p \\ & \vec{0}_F = f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i + \vec{x}_j, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i + \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p) \\ & = \underbrace{f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p)}_{=0} + f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p) \\ & \quad + f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p) + \underbrace{f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p)}_{=0} \\ & \Rightarrow f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p) = -f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_p) \\ & \text{Donc } f \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

Question 2 : Image d'une famille liée par une application alternée

Soit $f : E^p \rightarrow F$ une application p -linéaire alternée, $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ une famille liée.

Alors $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) = \vec{0}_F$

Preuve :

$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ est liée donc $\exists i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $x_i \in \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_p)$

$$\exists (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p-1} \text{ tel que } \vec{x}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p a_k \vec{x}_k$$

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_p) = f(\vec{x}_1, \dots, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p a_k \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_p)$$

$$(f \text{ est } p\text{-linéaire}) = a_1 f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) + \dots + a_k f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_p) + \dots + a_p f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \dots, \vec{x}_p)$$

$$(f \text{ est alternée}) = a_1 \times \vec{0}_F + \dots + a_k \times \vec{0}_F + \dots + a_p \times \vec{0}_F = \vec{0}_F$$

Question 4 : Formule de Taylor reste intégral

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I , $(a, b) \in I^2$. On a alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

Preuve :

$$\text{Intégration par parties : Pour } n=0 : f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x) dx$$

$$\begin{array}{lcl} \text{si } n > 0 : & + & \left| \begin{array}{l} f'(x) \\ f''(x) \\ f^{(3)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n+1)}(x) \end{array} \right. \begin{array}{l} 1 \\ -(b-x) \\ (-1)^2 \frac{(b-x)^2}{2} \\ \vdots \\ (-1)^n \frac{(b-x)^n}{n!} \end{array} \end{array}$$

$$\text{D'où } f(b) = f(a) - \left[\sum_{k=1}^n f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

$$f(b) = \underbrace{f(a)}_{k=0} + \sum_{k=1}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

Question 5 : Formule de Taylor-Lagrange

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I , $(a, b) \in I^2$. On a alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

Preuve :

$|f^{(n+1)}|$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle est bornée $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| = M$

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \left| \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx \right|$$

$$\text{si } a \leq b : \leq \int_a^b \left| \frac{(b-x)^n}{n!} \right| |f^{(n+1)}(x)| dx \leq \int_a^b \left| \frac{(b-x)^n}{n!} \right| M dx = \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} M \right]_a^b = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

$$\text{si } a > b : \leq \int_b^a \left| \frac{(x-b)^n}{n!} \right| |f^{(n+1)}(x)| dx \leq \int_b^a \left| \frac{(x-b)^n}{n!} \right| M dx = \left[+\frac{(x-b)^{n+1}}{(n+1)!} M \right]_b^a = \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!} M = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Question 6 : Unicité du développement limité

Si f admet un $DL_n(0)$, celui-ci est unique (unicité des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$).

Preuve :

$$\text{Si } \forall x \in D_f, f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

Avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

$(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (b_0, b_1, \dots, b_n)$. On note p le plus petit entier tel que : $a_p \neq b_p$ (et donc $\forall k < p, a_k = b_k$)

$$\text{Donc } \forall x \in D_f, a_p x^p + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = b_p x^p + \dots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

$$\Leftrightarrow a_p + a_{p+1} x + \dots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon_1(x) = b_p + b_{p+1} x + \dots + b_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon_2(x)$$

Par passage à la limite $a_p + 0 + \dots + 0 + 0 = b_p + 0 + \dots + 0 + 0$

Donc $a_p = b_p$ contredit l'hypothèse de départ donc $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$.

Question 7 : Intégration d'un développement limité

Si f est continue sur I et si f admet un $DL_n(0)$: $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$

F , primitive de f , admet un $DL_{n+1}(0)$ tel que $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$.

Preuve :

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } f = o(x^n) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \quad F(x) - F(0) = \int_0^x f(t) dt$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall x \in I, |x| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |x^n| \Rightarrow \forall t \in [0, x], |f(t)| \leq \varepsilon |t^n| \leq \varepsilon |x^n|$$

$$|F(x) - F(0)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |f(t)| dt \leq \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \varepsilon |x^n| dt = \varepsilon |x^{n+1}|$$

$$F(x) - F(0) = o(x^{n+1})$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad G \text{ une primitive de } g$$

$$\text{On pose } f(x) = g(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad F(x) = G(x) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$F(x) - F(0) = - \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + G(x) - G(0) \quad G(x) = G(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Question 3 : Caractérisation des bases avec le déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , B une base de E , X une famille de n vecteurs de E

Alors : X est une base de $E \Leftrightarrow \text{Det}_B(X) \neq 0$

Preuve :

$$\Rightarrow : 1 = \text{Det}_X(X) = \text{Det}_X(B) \text{Det}_B(X) \Rightarrow \text{Det}_B(X) \neq 0$$

$\Leftarrow$: Si X est liée, $\text{Det}_B(X) = 0$ Impossible donc X est libre, de cardinal $n = \dim(E)$ c'est donc une base de E .