Colle 23 – Version 1

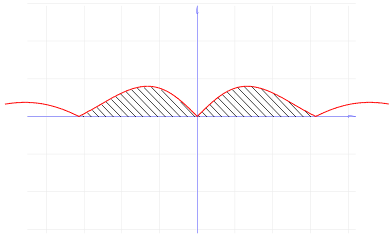
Question 1 :

Soit $f\ :\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$.

1. Si f est paire, alors $\forall a>0,\ \int_{-a}^{a} f(t)dt=2\int_{0}^{a} f(t)dt$
2. Si f est impaire, alors $\forall a>0,\ \int_{-a}^{a} f(t)dt=0$
3. Si f est p-périodique, alors $\forall a\in\mathbb{R},\ \int_{a}^{a+p} f(t)dt=\int_{0}^{p} f(t)dt$

Preuve :

1. *Voir dessin rouge*



$\int_{-a}^{a} f(t)dt=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt$

$u=-t\qquad du=-dt$

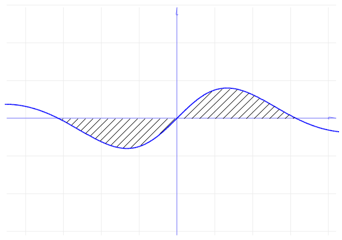
$t\ :\ -a\rightarrow 0$

$u\ :\ a\rightarrow 0$

$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\int_{a}^{0} f(u)du=\int_{0}^{a} f(t)dt$

Donc $\int_{-a}^{a} f(t)dt=2\int_{0}^{a} f(t)dt$

2. *Voir dessin bleu*



$\int_{-a}^{a} f(t)dt=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt$

$u=-t\qquad du=-dt$

$t\ :\ -a\rightarrow 0$

$u\ :\ a\rightarrow 0$

$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\int_{a}^{0} f(u)du=-\int_{0}^{a} f(t)dt$

Donc $\int_{-a}^{a} f(t)dt=0$

3. $\int_{a}^{a+p} f(t)dt=\int_{a}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{p} f(t)dt+\int_{p}^{a+p} f(t)dt$

$u=t-p\qquad du=dt$

$t\ :\ p\rightarrow a+p$

$u\ :\ 0\rightarrow a$

$\int_{p}^{a+p} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(u)du=-\int_{a}^{0} f(t)dt$

Donc $\int_{a}^{a+p} f(t)dt=\int_{0}^{p} f(t)dt$

Question 2 : Décomposition en produit de transpositions

Toute permutation de $S_n,\ n\geqslant 2,$ peut s'écrire comme le produit de transpositions.

Preuve :

Récurrence sur n :

– Pour $n=2,\ S_2=\{e,(1,2)_2\}$

– Supposons $n\geqslant 2$ et la propriété vraie au rang n :

Soit $\sigma\in S_{n+1}$

1^{er} cas : $\sigma(n+1)=n+1$

σ se restreint en une permutation σ' de S_n

H.R. $\Rightarrow\ \sigma'=\tau_1'\ldots\tau_k'$ où τ_i' est une transposition de S_n

qui se prolonge en τ_i une transposition de S_{n+1}, en posant $\tau_i(n+1)=n+1$

$\sigma=\tau_1\ldots\tau_k$

$2^{\text{ème}}$ cas : $\sigma(n+1)=p\ <n+1$

$\sigma'=[(p,n+1)\circ\sigma]\in S_{n+1}$

$\sigma'(n+1)=n+1$

D'après le premier cas : $\sigma'=\tau_1\ldots\tau_k,\ \tau_i$ transposition de S_{n+1}

$\sigma=(p,n+1)\circ\tau_1\circ\ldots\circ\tau_k$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 2$.

Question 3 : Signature d'un produit de permutations

$$\boxed{\forall \sigma, \tau \in S_n, \quad \varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).}$$

Preuve :

Soient : $A_1=\{\{i,j\} \text{ avec } i<j, \ \tau(i)<\tau(j) \text{ et } \sigma\tau(i)<\sigma\tau(j)\}$

$A_2=\{\{i,j\} \text{ avec } i<j, \ \tau(i)<\tau(j) \text{ et } \sigma\tau(i)>\sigma\tau(j)\}$

$A_3=\{\{i,j\} \text{ avec } i<j, \ \tau(i)>\tau(j) \text{ et } \sigma\tau(i)<\sigma\tau(j)\}$

$A_4=\{\{i,j\} \text{ avec } i<j, \ \tau(i)>\tau(j) \text{ et } \sigma\tau(i)>\sigma\tau(j)\}$

On pose $n_k=\text{Card}(A_k)$

Nombre d'inversions de σ : n_2+n_3

Nombre d'inversions de τ : n_3+n_4

Nombre d'inversions de $\sigma\tau$: n_2+n_4

$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n_2+n_3} \qquad \varepsilon(\tau)=(-1)^{n_3+n_4} \qquad \varepsilon(\sigma\tau)=(-1)^{n_2+n_4}$

$\varepsilon(\sigma).\varepsilon(\tau)=(-1)^{n_2+n_3+n_3+n_4}=(-1)^{n_2+n_4}\times(-1)^{2n_3}=\varepsilon(\sigma\tau)$

Question 4 : Signature d'une transposition

$\boxed{\text{Une transposition est une permutation impaire.}}$

Preuve :

$i<j$

$$\tau=\begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Inversions : $\{i,i+1\},\{i,i+2\},\dots,\{i,j-1\},\{i,j\}$

$\{i+1,j\},\{i+2,j\},\dots,\{j-1,j\}$

Nombre d'inversions : $2k+1$

Donc $\varepsilon(\tau)=-1$.

Question 5 : Signature d'un cycle

$\boxed{\text{La signature d'un cycle de longueur } k \text{ est } (-1)^{k-1}.}$

Preuve :

Soit c un cycle de S_n de longueur k, de support $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ $\quad c=(a_1,\dots,a_k)_n$

Soit a la permutation définie par $a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k & \underbrace{* \quad \dots \quad *}_{\text{en dehors du support}} \end{pmatrix}$

Soit γ le cycle $(1,2,\dots,k)_n$: $\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & k & 1 & k+1 & \dots & n \end{pmatrix}$

Montrer que : $c=a\gamma a^{-1}$

Si $j\in\{a_1,\dots,a_k\}$ $\quad j=a_i \qquad c(j)=c(a_i)=\begin{matrix} a_{i+1} & \text{si } i\neq k \\ a_1 & \text{si } i=k \end{matrix}$

$a\gamma a^{-1}(j)=a\gamma a^{-1}(a_i)=a\gamma(i)=\begin{matrix} a(i+1)=a_{i+1} \\ a(1)=a_1 \end{matrix}$

Si $j\notin\{a_1,\dots,a_k\}$ $\quad c(j)=j$

$a\gamma a^{-1}(j)=a\gamma(l) \quad l>k$

$=a(l)=j$

Donc $c=a\gamma a^{-1}$

$\varepsilon(c)=\varepsilon(a)\varepsilon(\gamma)\varepsilon(a^{-1})=\varepsilon(a a^{-1})\varepsilon(\gamma)=\varepsilon(\gamma)$

Inversions de γ : $\{1,k\},\{2,k\},\dots,\{k-1,k\} \qquad k-1$ inversions

Donc $\varepsilon(c)=\varepsilon(\gamma)=(-1)^{k-1}$