Colle 22 – Version 3

Question 1 :

Soit f une fonction continue positive sur le segment $[a,b], a<b$.
L'intégrale de f sur $[a,b]$ est nulle si et seulement si f et nulle sur $[a,b]$.

Preuve :

$\Leftarrow$: Si f est nulle, son intégrale est nulle.

$\Rightarrow$: Par contraposition : supposons qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)\neq 0$ ($\Rightarrow$ $f(c)>0$).

f est continue en c. Posons $\varepsilon=\dfrac{f(c)}{2}>0$. Alors :

$\exists\delta>0$ tel que $\forall x\in[a,b],\ |x-c|\leqslant\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|\leqslant\varepsilon$

$-\dfrac{f(c)}{2}=-\varepsilon\leqslant f(x)-f(c)\quad\Rightarrow\quad f(x)\geqslant\dfrac{f(c)}{2}$

Soit φ : $\begin{array}{lll} x\mapsto 0 & \text{si } x\notin[c-\delta,c+\delta]\cap[a,b] \\ x\mapsto \dfrac{f(c)}{2} & \text{si } x\in[c-\delta,c+\delta]\cap[a,b]\end{array}$

φ est une fonction en escalier et $\varphi\leqslant f\ \Rightarrow\ \int_a^b\varphi\leqslant\int_a^b f$

Or, $\int_a^b\varphi\ =\ \dfrac{f(c)}{2}\times((c+\delta)-(c-\delta))\ =\ \delta f(c)\ >\ 0$ (pour $a\leqslant c-\delta$ et $c+\delta\leqslant b$)

Donc $0\ <\ \int_a^b f$

Par contraposition, $\int_a^b f=0\ \Rightarrow\ \forall x\in[a,b],\ \ f(x)=0$

Question 2 : Somme de Riemann :

Si f est continue sur $[a,b]$, alors :

$$\lim\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\ =\ \int_{[a,b]}f$$

Preuve :

f est continue sur le segment $[a,b]$ ($a<b$) donc uniformément continue :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0$ tel que $\forall x,y\in[a,b],\ |x-y|\leqslant\alpha\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$

$\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n>N,\ \dfrac{b-a}{n}\leqslant\alpha\qquad\dfrac{b-a}{n}\to 0$

$\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ \ a_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$

$$\begin{aligned}\left|R_n-\int_a^b f\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(a_i)-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}f(a_i)dx-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}f(x)dx\right|\\ &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}(f(a_i)-f(x))dx\right|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f(a_i)-f(x)|dx\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\varepsilon\, dx\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\varepsilon\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\varepsilon\ =\ (b-a)\varepsilon\end{aligned}$$

Donc $R_n\to\int_a^b f$

Question 3 : Produit scalaire :

Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b], a<b$. Alors :

$$(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} f\,g$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Preuve :

Soit $\varphi(f,g)=\int_a^b f\,g$

- $\int_a^b f\,g \in \mathbb{R} \quad \rightarrow$ forme
- $\int_a^b f\,g = \int_a^b g\,f \quad \rightarrow$ symétrique
- $\forall g, f_1, f_2 \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

  $\varphi(\lambda f_1+f_2, g)=\int_a^b (\lambda f_1+f_2)g=\int_a^b \lambda f_1 g+f_2 g=\lambda\int_a^b f_1 g+\int_a^b f_2 g=\lambda\varphi(f_1,g)+\varphi(f_2,g)$

  φ est linéaire par rapport à la première variable et φ est symétrique $\quad \rightarrow$ bilinéaire
- $\varphi(f,f)=\int_a^b f^2 \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale) $\quad \rightarrow$ positive
- $\varphi(f,f)=0 \Rightarrow \int_a^b f^2 = 0$ Or $f^2 \geqslant 0$ et f^2 continue sur $[a,b]$ et $a<b$

  $\Rightarrow f^2 = x \mapsto 0 \Rightarrow f = x \mapsto 0$

  $f = x \mapsto 0 \Rightarrow \int_a^b f\,g = 0 \Rightarrow \varphi(f,f)=0 \quad \rightarrow$ définie.

Question 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec $a<b$. Alors :

$$\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \cdot \int_{[a,b]} g^2$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

Preuve :

Soient f et $g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_a^b (t\,f(x)+g(x))^2 dx \geqslant 0\ \forall t \in \mathbb{R} \\ &= \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)t^2+2\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)t+\int_a^b (g(x))^2 dx \\ &= A.t^2+2B.t+C \quad \text{(polynôme)} \end{aligned}$$

Si $f \neq x \mapsto 0$ $A \neq 0$ et P est un polynôme de degré 2 toujours positif.

Donc $\Delta \leqslant 0$ (et $A>0$)

$\Delta = 4(B^2-AC)$

$\Delta \leqslant 0 \Leftrightarrow B^2 \leqslant AC \Leftrightarrow \left(\int_a^b f\,g\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$

Si $f = x \mapsto 0$ l'inégalité devient : $0 \leqslant 0$: Vrai.

<u>Cas d'égalité :</u>

− Si $f = x \mapsto 0$: égalité $\forall g$

Si $f \neq x \mapsto 0$: égalité si $\Delta = 0$

$\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0)=0 \Leftrightarrow \int_a^b (t_0 f(x)+g(x))^2 dx = 0 \Rightarrow (t_0 f+g)^2=0 \qquad (t_0 f+g)^2 \geqslant 0$ et continue

$\Rightarrow g = -t_0 f$

Donc f et g sont proportionnelles.

− Réciproquement, si f et g sont proportionnelles : $g = \alpha f$ ou $f=0$

$\left(\int_a^b f\,g\right)^2 = \left(\int_a^b \alpha f^2\right) = \alpha^2\left(\int_a^b f^2\right)^2$

$\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b \alpha^2 f^2\right) = \alpha^2\left(\int_a^b f^2\right)^2$

Il y a bien égalité.

Question 5 : Théorème fondamental de l'analyse :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un point de I. Alors :

1. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a
2. Pour toute primitive F de f sur I : $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

Preuve :

$\forall x \in I$, f est continue sur $[a, x]$ donc $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est bien définie.

$F_a(a) = 0$

$\forall x_0 \in I$, $\forall x \neq x_0$

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0}$$

f est continue en x_0 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$

$$\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt = (x - x_0) f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt$$

Soit $\Delta = \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)$

$$|\Delta| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)\,dt \right|$$

Pour x tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$ (et donc $|t - x_0| \leqslant \delta$) :

Si $x_0 < x$: $|\Delta| \leqslant \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt \leqslant \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon\,dt = \frac{1}{x - x_0} \varepsilon (x - x_0) = \varepsilon$

Si $x_0 > x$: $|\Delta| \leqslant \frac{1}{-(x - x_0)} \int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\,dt \leqslant \frac{1}{x_0 - x} \int_{x_0}^x \varepsilon\,dt = \frac{1}{x_0 - x} \varepsilon (x_0 - x) = \varepsilon$

Donc $\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} \to f(x_0)$ donc F_a est dérivable et $F_a' = f$.

Si G est une autre primitive de f qui s'annule en a, alors $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F_a + c$

$G(a) = F_a(a) + c \Leftrightarrow 0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0 \quad \to$ Unicité

$\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $F = F_a + c$

$$F(x) - F(a) = F_a(x) + c - F_a(a) - c = \int_a^x f(t)\,dt - 0 = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Question 6 : Dérivabilité et dérivée de $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ continue.
Alors la fonction $g : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est définie sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :
$\forall x \in I$, $g'(x) = f(v(x)) v'(x) - f(u(x)) u'(x)$.

Preuve :

$$\forall x \in I, \quad \left.\begin{array}{l} u(x), v(x) \in J \\ J \text{ est un intervalle} \end{array}\right\} \Rightarrow [u(x), v(x)] \subset J$$

f est continue sur J donc est continue sur $[u(x), v(x)]$, donc $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ existe, et g est définie sur I.

f est continue sur J donc admet une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.

De plus, $\forall x \in I, g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.

Par composition, g est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\forall x \in I$, $g'(x) = v'(x) F'(v(x)) - u'(x) F'(u(x))$.