Colle 21 – Version 2

Question 1 : Représentation des matrices de rang r

Soit $A\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
A est de rang r $\Leftrightarrow$ il existe des matrices inversibles U,V telles que
$A=U\times J_r\times V$ (c'est à dire $A=U\times J_{r_{(p,n)}}\times V$)
$\Leftrightarrow$ $U^{-1}\times A\times V^{-1}=J_r$.

Preuve :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, de base $\mathscr{B}$, et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, et de base $\mathscr{C}$
Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$ tel que $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)=A$

$\Leftarrow$: $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(u)$
$A=U\times J_r\times V$ $\Rightarrow$ $J_r=U^{-1}\times A\times V^{-1}$
Soient $\mathscr{B}'$ la base de E telle que $V^{-1}=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $\mathscr{C}'$ la base de F telle que $U=P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$
Alors $J_r=\mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ donc $\mathrm{rg}(u)=\mathrm{rg}(J_r)=r$ Donc $\mathrm{rg}(A)=r$.

$\Rightarrow$: $r=\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(u)$
Théorème du rang : tout supplémentaire à $\mathrm{Ker}(u)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$.
Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$: $S\oplus\mathrm{Ker}(u)=E$ $\dim(S)=r$ $\dim(\mathrm{Ker}(u))=n-r$
Notons $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_r})$ une base de S et $(\overrightarrow{e_{r+1}},\dots,\vec{e_n})$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
Par concaténation des bases, $\mathscr{B}'=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ est une base de E.
$u_{|S}$ réalise un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$
Donc $(u(\vec{e_1}),\dots,u(\vec{e_r}))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ que l'on complète en une base de F :
$\mathscr{C}'=(u(\vec{e_1}),\dots,u(\vec{e_r}),\overrightarrow{f_{r+1}},\dots,\vec{f_p})$

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)=\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & \vdots\\
\vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} u(\vec{e_1})\\ u(\vec{e_2})\\ \vdots\\ u(\vec{e_r})\\ \overrightarrow{f_{r+1}}\\ \vdots\\ \vec{f_p}\end{matrix}\\
\begin{matrix} u(\vec{e_1}) & \dots & u(\vec{e_r}) & \underbrace{u(\overrightarrow{e_{r+1}})\ \dots\ u(\vec{e_n})}_{\in\mathrm{Ker}(u)}\end{matrix} &
\end{array} = J_{r_{(p,n)}}$$

Avec $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ $Q=P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$
$J_r=Q^{-1}\times A\times P$ $\Leftrightarrow$ $A=Q\times J_r\times P^{-1}$
On pose : $U=Q$, $V=P^{-1}$ U et V sont inversibles car ce sont des matrices de passage
Alors : $A=U\times J_r\times V$.

Question 5 :

Soit $f : I\to\mathbb{R}$ dérivable et convexe.
Alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Preuve :

$\forall a\in I$, Équation de la tangente en a : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$
$\forall x\in I$, $x\neq a$

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,x]\\ f \text{ dérivable sur }]a,x[\end{cases} \underset{\text{T.A.F.}}{\Rightarrow} \exists c\in]a,x[\text{ tel que } \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c) \Rightarrow f(x)-f(a)=(x-a)f'(c)$$

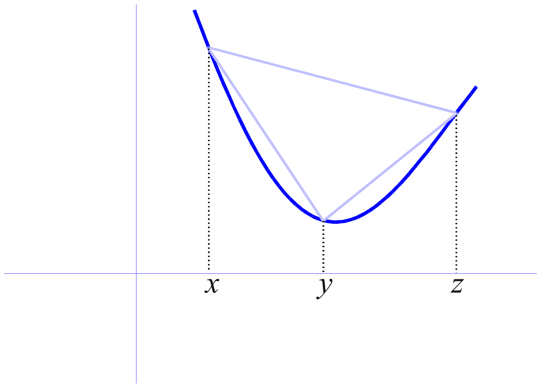
$f(x)-y = f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) = (x-a)[f'(c)-f'(a)]$
Or, f' est croissante donc : si $x<a$, alors $f'(c)\leqslant f'(a)$ et si $x>a$, alors $f'(c)\geqslant f'(a)$
Donc $(x-a)[f'(c)-f'(a)]\geqslant 0$ donc $f(x)-y\geqslant 0$.

Question 3 : Inégalité des trois pentes :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe
2. $\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \Rightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$
3. $\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \Rightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$
4. $\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \Rightarrow \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$



Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. : $\forall x, y, z \in I$ avec $x < y < z$

$$\exists \lambda \in]0,1[\text{ tel que } y = \lambda x + (1-\lambda) z \Leftrightarrow \lambda = \frac{z-y}{z-x}$$

$$f \text{ convexe} \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$$

$$\Leftrightarrow f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$$

$$\Leftrightarrow (z-x) f(y) \leqslant (z-y) f(x) + (y-x) f(z) \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow z f(y) - (z-y) f(x) \leqslant x f(y) + (y-x) f(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

2. $\Rightarrow$ 1. : $\forall x, z \in I, \ \forall \lambda \in [0,1]$

Si $\lambda = 0$: $f(z) \leqslant f(z)$ Vrai

Si $\lambda = 1$: $f(x) \leqslant f(x)$ Vrai

Si $\lambda \in]0,1[$: On pose $y = \lambda x + (1-\lambda) z$

$x < y < z$ donc d'après le calcul précédent :

$f(\lambda x + (1-\lambda) z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z) \Rightarrow f$ est convexe.

2. $\Leftrightarrow$ 3. $\Leftrightarrow$ 4. : Se déduit de la même façon à partir de l'équation $(*)$.

Question 4 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

f est convexe $\Leftrightarrow$ f' est croissante.

Preuve :

$\Rightarrow$: $\forall x, y \in I$ avec $x < y, \ \forall t \in]x, y[$

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} & \leqslant & \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \leqslant & \dfrac{f(y)-f(t)}{y-t} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle t \to x,\ t > x} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle t \to y,\ t < y} \\ f'(x) & \leqslant & \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \leqslant & f'(y) \end{array}$$

Donc f' est croissante.

$\Leftarrow$: $\forall x, y, z \in I$ avec $x < y < z$

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [x, y] \\ f \text{ dérivable sur }]x, y[\end{cases} \underset{\text{T.A.F.}}{\Rightarrow} \exists c \in]x, y[\text{ tel que } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$$

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [y, z] \\ f \text{ dérivable sur }]y, z[\end{cases} \underset{\text{T.A.F.}}{\Rightarrow} \exists d \in]y, z[\text{ tel que } \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(d)$$

$c < y < d \Rightarrow f'(c) < f'(d)$ (car f' est croissante)

Donc $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$

Donc f est convexe.

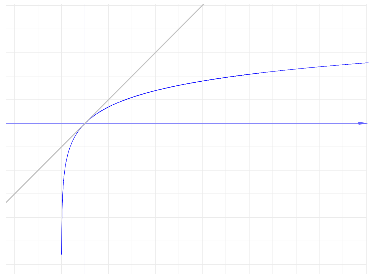
Question 6 :

1. $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$

$\ln(1+x)$ est une fonction concave :

$(\ln(1+x))'' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \leqslant 0$

Elle est donc toujours en-dessous de sa tangente.
Sa tangente en 0 est $y = x$
Donc $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

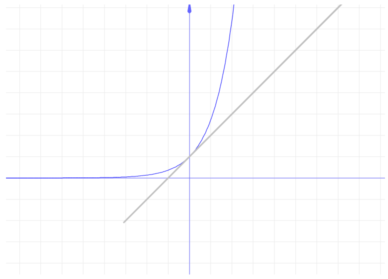


2. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$

e^x est une fonction convexe :

$(e^x)'' = e^x > 0$

Elle est donc au-dessus de sa tangente.
Sa tangente en 0 est $y = x + 1$
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$



3. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$

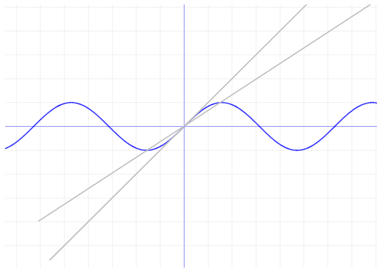
Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x$ est une fonction concave :

$(\sin x)'' = -\sin x \leqslant 0$

Elle est donc en-dessous de sa tangente et au-dessus de sa corde.

Sa tangente en 0 est $y = x$ et sa corde est $y = \dfrac{2}{\pi} x$

Donc $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$



Question 2 : Théorème du point fixe :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $[a, b]$ stable par f, f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $|f'| \leqslant k < 1$.
Alors :

1. f possède un unique point fixe l
2. $(u_n) : \begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers l et $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$

Preuve :

Pour $f : [a, b] \to [a, b]$

1. Existence : on pose $g(x) = f(x) - x$ continue sur $[a, b]$, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$

   $\underset{\text{T.V.I.}}{\Rightarrow} \exists c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) = c$.

   Unicité : si d est un autre point fixe.

   I.A.F. à f (f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $|f'| \leqslant k$) : $|f(c) - f(d)| \leqslant k |c - d|$

   $\Leftrightarrow |c - d| \leqslant k |c - d| \Rightarrow c = d$ (sinon $1 \leqslant k$)

2. $u_0 \in [a, b]$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Notons l le point fixe.

   · f étant définie sur $[a, b]$, $[a, b]$ étant stable par f et $u_0 \in [a, b]$: la suite est bien définie et $\forall n,\ u_n \in [a, b]$

   · I.A.F. à f entre u_n et l (f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $|f'| \leqslant k$) :

   $|f(u_n) - f(l)| \leqslant k |u_n - l| \Leftrightarrow |u_{n+1} - l| \leqslant k |u_n - l|$

   Récurrence : $H_n : |u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$

   $-\ H_0$ est vraie.

   $-$ Supposons $n \in \mathbb{N}$ et la propriété vraie au rang n.

   $|u_{n+1} - l| \leqslant k |u_n - l| \underset{\text{H.R.}}{\leqslant} k . k^n |u_0 - l| = k^{n+1} |u_0 - l|$

   Donc H_{n+1} est vraie.

   Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $0 \leqslant k \leqslant 1 \Rightarrow k^n \to 0$ Par encadrement, $u_n \to l$.