Colle 20

Question 1 : Somme et produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

– Soit $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $f,g\in\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$
$f+g\in\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$
– Soit $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $f,g\in\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$
$fg\in\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$

Preuve :

– Récurrence sur n :
· Pour $n=0$: f et g continues sur I $\Rightarrow$ $f+g$ continue sur I
· Supposons $n\in\mathbb{N}$ et la propriété vraie au rang n.
Soient f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.
f et g sont dérivables sur I donc $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)'=f'+g'$

$$f \text{ et } g \text{ de classe } \mathscr{C}^{n+1} \Rightarrow f' \text{ et } g' \text{ de classe } \mathscr{C}^n \overset{\text{HR}}{\Rightarrow} f'+g' \text{ de classe } \mathscr{C}^n$$
$$\Rightarrow (f+g)' \text{ de classe } \mathscr{C}^n$$
$$\Rightarrow (f+g) \text{ de classe } \mathscr{C}^{n+1}$$

La propriété est vérifiée au rang $n+1$.
Par récurrence la propriété est vraie pour tout n.

– Récurrence sur n :
· Pour $n=0$: f et g continues sur I $\Rightarrow$ fg continue sur I.
· Supposons $n\in\mathbb{N}$ et la propriété vraie au rang n.
Soient f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.
f et g sont dérivables sur I donc fg est dérivable sur I

$$f \text{ et } g \text{ de classe } \mathscr{C}^{n+1} \Rightarrow f, g, f' \text{ et } g' \text{ de classe } \mathscr{C}^n \overset{\text{HR}}{\Rightarrow} f'g \text{ et } fg' \text{ de classe } \mathscr{C}^n$$
$$\Rightarrow (fg)' \text{ de classe } \mathscr{C}^n$$
$$\Rightarrow (fg) \text{ de classe } \mathscr{C}^{n+1}$$

La propriété est vérifiée au rang $n+1$.
Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Question 6 : Caractérisation des fonctions dérivables monotones

Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
1. f croissante sur $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $f'\geqslant 0$ sur $]a,b[$
2. f décroissante sur $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $f'\leqslant 0$ sur $]a,b[$

Preuve :

1. $\Rightarrow$: $\forall c\in]a,b[\quad \forall x\in[a,b], x\neq c$
$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant 0$ Par passage à la limite $f'(c)\geqslant 0$
$\Leftarrow$: $\forall x,y\in[a,b], x<y$
T.A.F. à f entre x et y (f continue et dérivable) :
$\exists c\in]x,y[$ tel que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)\geqslant 0$
Or $y-x\geqslant 0$ $\Rightarrow$ $f(y)-f(x)\geqslant 0$ $\Rightarrow$ f croissante.
2. On applique le 1. à $-f$.

Question 2 : Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Preuve :

Récurrence sur n:

· Pour $n=0$: $(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

· Supposons $n \in \mathbb{N}$ et la propriété vraie au rang n.

Soient f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' &\overset{\text{HR}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} f^{(k')} g^{(n+1-k')} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}
$$

La propriété est vérifiée au rang $n+1$.

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 3 : Condition nécessaire d'extremum

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$.

Si f possède un extremum local en $c \in]a,b[$, alors $f'(c) = 0$.

Preuve :

Si f possède un maximum local en c

$\exists h > 0$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $|x-c| \leqslant h \Rightarrow f(x) \leqslant f(c)$

$\forall x \in [a,b] \cap]c, c+h]$ $\quad \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} \leqslant 0$

Par passage à la limite $f'(c) \leqslant 0$

$\forall x \in [a,b] \cap [c-h, c[$ $\quad \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} \geqslant 0$

Par passage à la limite $f'(c) \geqslant 0$ Donc $f'(c) = 0$.

Question 4 : Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si de plus $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve :

f est continue sur $[a,b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes.

$m = \inf_{[a,b]} f = f(c)$

$M = \sup_{[a,b]} f = f(d)$ $\qquad c, d \in [a,b]$

Premier cas : si c ou $d \in]a,b[$ alors $f'(c) = 0$ ou $f'(d) = 0$

d'après la proposition : condition nécessaire d'extremum

Second cas : si m et M sont atteint aux bornes,

alors $m = M$ car $f(a) = f(b)$, donc f est constante, donc $c = \dfrac{a+b}{2}$ et $f'(c) = 0$.

Question 5 : Théorème des accroissements finis (T.A.F.)

Soit $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$.

Alors $\exists c\in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Preuve : (méthode 1)

On utilise une fonction auxilaire.

On pose $g(x)=f(x)-\textit{équation de la corde}$

Équation de la corde : $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

Donc $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$

$$\begin{cases} g(a)=0 \text{ et } g(b)=0 \\ g \text{ est continue sur } [a,b] \\ g \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases} \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c\in]a,b[\text{ tel que } g'(c)=0$$

Or $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Donc $g'(c)=0 \iff f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Question 7 : Théorème de prolongement C¹ (limite de la dérivée)

Soit $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$.

Si de plus f' a une limite finie en a alors :

− f est dérivable en a et $f'(a)=l$

− f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

Preuve :

$f' \underset{a}{\to} l\ :\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ tel que $\forall t\in]a,b],\ |t-a|\leqslant\delta \Rightarrow |f'(t)-l|\leqslant\varepsilon$

$\forall x\in]a,b]$ avec $|x-a|\leqslant\delta$:

f continue sur $[a,x]$, dérivable sur $]a,x[\overset{\text{T.A.F.}}{\Rightarrow} \exists c_x\in]a,x[$ tel que $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-l\right|=|f'(c_x)-l|$

$|x-a|\leqslant\delta \Rightarrow |c_x-a|\leqslant\delta \Rightarrow |f'(c_x)-l|\leqslant\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-l\right|\leqslant\varepsilon$

Donc f est dérivable en a et $f'(a)=l$

$$\begin{cases} f \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]a,b[\\ f \text{ dérivable en } a \\ f'(a)=\lim\limits_{a} f' \end{cases} \Rightarrow f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b].$$

Question 8 : Représentation des matrice de rang r

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

A est de rang $r \Leftrightarrow$ il existe des matrices inversibles U, V telles que

$A = U \times J_r \times V$ (c'est à dire $A = U \times J_{r_{(p,n)}} \times V$)

$\Leftrightarrow U^{-1} \times A \times V^{-1} = J_r$.

Preuve :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, de base $\mathscr{B}$, et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, et de base $\mathscr{C}$

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A$

$\Leftarrow$: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$

$A = U \times J_r \times V \Rightarrow J_r = U^{-1} \times A \times V^{-1}$

Soient $\mathscr{B}'$ la base de E telle que $V^{-1} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $\mathscr{C}'$ la base de F telle que $U^{-1} = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

Alors $J_r = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ donc $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(J_r) = r$ Donc $\mathrm{rg}(A) = r$.

$\Rightarrow$: $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$

Théorème du rang : tout supplémentaire à $\mathrm{Ker}(u)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$.

Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$: $S \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$ $\dim(S) = r$ $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - r$

Par concaténation des bases, $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E.

$u_{|S}$ réalise un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$

Donc $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ que l'on complète en une base de F :

$\mathscr{C}' = (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_r), \overrightarrow{f_{r+1}}, \dots, \overrightarrow{f_p})$

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ u(\vec{e}_1) \quad \dots \quad u(\vec{e}_r) \; \underbrace{u(\overrightarrow{e_{r+1}}) \; \dots \; u(\vec{e}_n)}_{\in \mathrm{Ker}(u)} \end{array} \begin{array}{c} u(\vec{e}_1) \\ u(\vec{e}_2) \\ \vdots \\ u(\vec{e}_r) \\ \overrightarrow{f_{r+1}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{f_p} \\ \\ \end{array} = J_{r_{(p,n)}}$$

Avec $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

$J_r = Q^{-1} \times A \times P \Leftrightarrow A = Q \times J_r \times P^{-1}$

On pose : $U = Q$, $V = P^{-1}$ U et V sont inversibles car ce sont des matrices de passage

Alors : $A = U \times J_r \times V$.